IN DEI NOMINE.

OPERETTA
DELLE LINEE RETTE EQVIDISTANTI, ET NON EQVIDISTANTI.

DI

Pietro Antonio Cataldo.



IN BOLOGNA,

Preſſo gli Heredi di Giouanni Roſsi. M.DC.III.

Con licenza de' Superiori.

Ex libris D. Antonij Franchini

Digitized by Google

Digitized by Google

A' GLI ECCELLENTISS. ET CORTESISS. SIGNORI MATHEMATICI,

Signori ſempre Colendiſsimi.

Pietro Antonio Cataldo.

INCLVDENDOSI *nella preſente Operetta la dimoſtratione di quello, che nel primo libro de gli Elementi d'Euclide è poſto per quinta petitione, coſa deſiderata da molti; Et anco ſenza aiuto d'eſſa, eſſendoui dimoſtrata oſtenſiuamente la venteſimanona propoſitione del detto primo libro; hò nel publicarla al Mondo preſo ardire d'indrizzarla, come fo, alle Eccellentiſſime, & amoreuoliſſime Signorie Voſtre, accioche ſe dal loro ſaldo giuditio ſarà approuato concluderſi realmente quello, che in eſſa ſi tratta, ſi degnino riceuerla in protettione, & hauer me per deuotiſſimo, & humiliſſimo Seruo. Ringratiando meco Iddio Omnipotentiſſimo, Autore, & Maeſtro d'ogni dottrina, dell'hauercela data. Et quãdo non la trouaſſero tale, quale ſi deſidera, ſi contentino anco con la giudicioſiſſima bontà loro darle quella perfettione, che ſe le conuiene, eſcuſando me, che eſſendo huomo, & imperfetto (ancorche trattando di certiſſima Scienza Geometrica) haueſsi facilmente errato (hauendola maſſime interrottamente compoſta fra le molte anguſtie, infirmità, e trauagli, che molti anni ſono mi tengono di continuo oppreſſo) non reſtando perciò di ripormi nella gratia loro, come quello, che con tutto il cuore tutte anco le Signorie Voſtre Eccellentiſſime amo, & riueriſco. Et per fine prego N. S. Dio benigniſsimo, che di continuo à tutti ne illuſtri l'intelletto ad operare anco di continuo à gloria di ſua Diuina Maeſtà, & à ſalute del proſſimo. Di Bologna Venerdì alli 24. di Genaro* M. DC. III. *paſſando la Luna per il grado vigeſimoquarto de' Gemini, nel Trino ſiniſtro di Marte.*

Digitized by Google

AI LETTORI.

PErche il numero de gli Eccell. Mathematici è grande, ne l'Autore hà cognitione ſe non di pochiſſimi di eſsi, egli fà loro ſapere, che hà conſegnate quattrocento di queſte Operette al Molto Reu. Padre Don Valentino Pini Priore meritiſſimo de' Canonici Regolari di S. Saluadore di Bologna (quale, oltre all' altre molte dottrine, è anco Mathematico Eccellentiſſimo, come ben ſi conoſce dalla dottiſsima Opera ſua della Fabrica de gli Horologij Solari) accioche la Paternità ſua molto Reuerenda lo fauoriſca à farne donare vna à ciaſcuna delle loro Signorie Eccellentiſsime, che (come le ſupplica) li farà gratia di mandarla à pigliare.

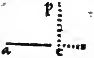
DI-

3

DEFINITIO PRIMA.

Diſtantia puncti dati extra propoſitam lineam rectam indefinitæ longitudinis ad ipſam propoſitam rectam, dicitur eſſe linea recta breuiſſima, quæ diſcedens à puncto dato perueniat ad rectam propoſitam.

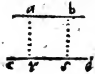
EXEMPLI gratia. Propoſita ſit recta a c, indefinitæ longitudinis, ſcilicet, vt poſsit produci à qualibet parte quantumlibet. Et dato puncto p, extra rectam ipſam (ſcilicet quod non ſit indirectum ipſius lineæ, ſeu tali in loco ſit vt producta recta propoſita, tranſire non poſsit per datum punctum p.) Diſtantia dicti puncti dati p, à propoſita recta a c, dicitur eſſe recta breuiſsima, quæ conſiderata diſcedere ab ipſo dato puncto p, perueniat ad propoſitã rectam a c, ſeu ad ipſius rectitudinem.



DEFINITIO II.

Linea recta data dicitur eſſe æquidiſtans rectæ propoſitæ in eodem plano, quando à duobus diuerſis punctis ad libitum in data recta aſſumptis, ductis rectis breuiſſimis ad propoſitam, ipſæ ſint ad inuicem æquales, ſeu manis. Quando in data recta linea, duobus diuerſis punctis ſignatis, diſtantiæ ab ipſis punctis ad rectam propoſitam ſint æquales. Sed non æquidiſtantes dicentur, data, & propoſita, quando diſtantia ipſæ eſſent inæquales. Et ipſæ duæ rectæ, data ſcilicet, & propoſita, dicũtur altera alteri viciniores fieri ab ea parte in qua diſtantia reperiatur minor, & remotiores fieri ab ea parte, in qua diſtantia reperiatur maior.

EXEMPLI gratia. Lineæ rectæ, ſcilicet data a b, & propoſita c d, dicuntur eſſe æquidiſtantes ad inuicem, quando in data a b, aſſumptis, vel ſignatis duobus diuerſis punctis, & ſint a, & b, & ab ipſis ad propoſitã c d, ductis lineis breuiſsimis (ſemper hac ratione, vt ipſa c d, ad quam ducendæ ſunt dictæ lineæ breuiſsimæ intelligatur eſſe indefinitæ longitudinis, ſcilicet, quod vtrinq; poſsit produci, quãdo opus ſit, vt lineæ breuiſsimæ, quæ ibunt à ſuſceptis punctis in data, ad rectitudinem ipſius propoſitæ terminari poſsint in ipſa propoſita) & ſint a r, & b s; ipſæ ad inuicem ſint æquales, ſcilicet, vt æquæ longa ſit a r, a c, b s, quæ



Digitized by Google

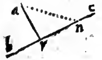
oſtendunt diſtantiam ab a b, in duobus diuerſis punctis a, & b, ad rectam c d, ſeu ad directionem ipſius c d, Sed quando ab a, ducta linea breuiſsima ad eandem c d, (quantum opus ſit producta) & ſit a d, & à b, ducta recta breuiſsima ad eandem c d, & ſit b r, eueniat, vt rectæ a d, & b r, (oſtẽdentes diſtantias rectæ a b, ad rectam c d, ſeu ad rectitudinem eiũs, in duobus diuerſis punctis a, & b,) ſint ad inuicem inæquales, tunc rectæ ipſæ a b, & c d, dicuntur eſſe non æquidiſtantes. Et ex diſtantijs, ſeu rectis breuiſsimis a d, & b r, reperta minori, ſeu breuiori b r, dextra, dicuntur rectæ a b, & c d, non æquidiſtantes, appropinquari ab ipſa parte dextra lineæ b r, breuioris, & remoueri à parte ſiniſtra lineæ a d, longioris.



THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Si à dato puncto ad lineam propoſitam indefinita longitudinis, ducatur perpendicularis, ipſa perpendicularis erit linea omnium breuiſsima earum quæ à puncto dato diſcendentes peruenire poſſint ad rectam propoſitam, nec aliqua alia recta, quæ ab eodẽ puncto dato diſcedens, perueniat ad eandem rectam propoſitam, poterit eſſe æqualis dictæ perpendiculari.

DATVM ſit punctũ a, & propoſita recta b c, ad quam à puncto a, ducta ſit perpendicularis a r; dicitur ea eſſe linea breuiſsima, quæ à puncto a, diſcedens peruenire poſsit ad rectã b c; Nam ſi ipſa breuiſsima non eſſet (per aduerſarium) aliqua alia linea eſſet breuior ipſa a r, & ſit (ſi fieri poſsit) a n, ideo in triangulo rectangulo a r n, cum per aduerſarium latus a n, ſit breuius a r, etiam (per 18. primi) angulus rectus r, oppoſitus rectæ a n, eſſet minor angulo a n r, ideo angulus a n r, eſſet obtuſus, maior ſcilicet recto, ſed etiam angulus externus a n c, (per 16. primi) eſt maior interno ſibi oppoſito a r n, recto, ideo ipſe etiam erit obtuſus; cum ergo quilibet duorum angulorũ a n r, & a n c, ſit obtuſus, ſcilicet maior recto, ſumma ipſorum eſſet maior duobus rectis, quod eſt impoſsibile (per 13. primi.) Vel ſi per aduerſarium, recta a n, eſſet breuior recta a r, etiam angulus r, rectus, eſſet minor angulo a n r, quamobrem a n r, eſſet obtuſus, ſed angulus ipſe a n r, ſimul cum a n c, conſtituunt ſummã æqualem duobus rectis (per 13. primi) ideo exiſtente angulo a n r, maiori re-



Digitized by Google

lori recto, tunc a n c, (quod eſt reſiduum duorum rectorum) eſſet minor recto, ideo acutus, ſed ipſe a n c, eſt externus triãguli a r n, & ideo maior interno r, recto, ſibi oppoſito, quamobrem acutus angulus eſſet maior recto, quod impoſsibile eſt, ergo etiam eſt impoſsibile, vt recta aliqua, quæ à puncto a, perueniat ad rectã b c, eſſe poſsit breuior perpendiculari a r. Quod etiam nulla alia recta, quæ ab eodem puncto dato diſcedens perueniat ad eandem rectam propoſitam poſsit eſſe æqualis dictæ perpendiculari a r, ita probatur. Si per aduerſarium aliqua alia, & ſit a n, æqualis eſſe poſſet rectæ a r, tunc in triangulo a r n, duorum laterum a r, & a n, æqualium (per aduerſarium) anguli r, & n, ad baſim (per primã partem quintæ primi) eſſent ad inuicem æquales, ſed r, eſt rectus, ideo n, etiã eſſet rectus. Et quia duo anguli a n r, & a n c, ſunt æquales duob. rectis (p 13. primi) vno a n r, exiſtẽte recto, alter ẽt a n c, eſſet rectus, ſed ipſe a n c, eſt externus trianguli a r n, ideo maior interno ſibi oppoſito r, recto, vnde rectus eſſet maior recto (vel externus eſſet æqualis interno ſibi oppoſito ambobus exiſtentibus rectis) quod eſt impoſsibile; impoſsibile ergo eſt quod aliqua alia recta ducta ab a, puncto, vſq; ad rectam b c, ſit æqualis, neq; minor perpendiculari a r; ideo ipſa a r, erit recta breuiſsima.

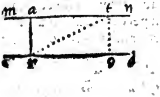
COROLLARIVM.

Hinc manifeſtum eſt, quod. Quando à dato puncto ad rectam propoſitam ducitur perpendicularis, ipſa eſt diſtantia, qua reperitur inter punctum datum, & lineam propoſitam.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

Quando duæ rectæ lineæ ad inuicem ſunt æquidiſtãtes, lineæ à prima perpendiculariter peruenĩẽtes ad ſecundam erunt etiam perpendiculares ipſi primæ.

SINT duæ rectæ m n, & c d, æquidiſtantes, & à puncto a, in prima notato, ducta ſit a r, perpendicularis ad ſecundam, ſcilicet, vt faciat angulos ad r, rectos, dicitur eadem a r, perpendicularis etiam eſſe ad primã lineam m n, ſcilicet, quod anguli etiam ad a, ſunt recti; Nam ſi ipſa r a, non eſſet perpendicularis ad m n, ſequeretur, quod ſi ab r, duceretur recta perpendicularis ad m n, ipſa alibi termina-



retur, quã in a; terminetur ergo ſi poſsibile eſt in t, & ideo a t r, & n t r, eſſent anguli recti, & in triangulo rectangulo r t a, quod habet latus t a, productum in m, angulus r a m, externus (per 16. primi) eſſet minor recto r t a, interno, ſibi oppoſito, ideo eſſet obtuſus, ſed ſumma duorum angulorum r a m, & r a t, eſt æqualis duobus rectis, ideo cum vnus ipſorũ r a m, ſit maior recto, ſcilicet obtuſus, alter qui remanet r a t, eſſet minor altero recto, ideo acutus, quare ipſe eſſet minor angulo r t a, qui eſt rectus per aduerſarium. Et conſiderato triangulo rectangulo r t a; quia angulus r a t, acutus, eſſet minor angulo r t a, recto, latus etiam r t, quod opponitur acuto eſſet minus latere r a, recto oppoſito; Nunc à puncto t, ducatur perpendicularis ad rectam c d, & ſit t o, quæ neceſſario perueniet ad c d, à parte dextra puncti r, ſcilicet verſus d, (in r, enim ire non poteſt, ſcilicet non poteſt eſſe t r, nam tunc angulus t r d, eſſet rectus, ſed ipſe eſt pars anguli a r d, qui etiam eſt rectus (ex hypotheſi) & anguli recti ſunt ad inuicem æquales, ideo pars



eſſet æqualis totó, quod eſt impoſsibile. Nec etiam inter r, & c, ire poteſt, ponamus in u, ſecando rectã a r, ponamus in s, nam tunc in paruo triangulo s u r, cum angulus u, internus ſit rectus, ipſe eſſet æqualis angulo s r d, qui etiam eſt rectus, & internus ipſi oppoſitus, quod eſt impoſsibile (per 16. primi) & quia ex hypothiſi duæ rectæ m n, & c d, ſunt æquidiſtantes, duæ a r, & t o, perpendiculares ad c d, erunt ad inuicem æquales, & quia angulus a r d, eſt rectus, angulus t r o, eius pars, & ꝓpterea minor eó, erit acutus, ſcilicet minor recto; ideo minor etiam angulo recto t o r, cum autem in triangulo rectangulo t o r, angulus t r o, acutus, ſit minor t o r, recto, etiam latus t o, (acuto oppoſitum) erit minus latere r t, (recto oppoſito) quare r a, etiam (t o, æquale) erit minus eadem linea r t, ſcilicet r t, erit maior r a, ſed ſuperius probatũ eſt ipſam r t, eſſe minorem ipſa r a, ideo r t, eſſet maior, & minor recta a r, quod eſt impoſsibile, ergo etiam impoſsibile eſt illud à quo hæc impoſsibilitas deduceretur, ſcilicet, quod a r, perpendicularis ad c d, non ſit etiam perpendicularis ad m n, erit igitur ipſi m n, perpẽdicularis, ꝙ probandum proponebatur.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

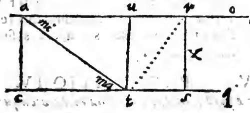
Datis duabus rectis lineis æquidiſtantibus, ſi à duobus diuerſis punctis in

ctis in

Digitized by Google

ctis in prima ſignatis ducantur duæ perpendiculares ad ſecundam, tunc pars primæ lineæ intercepta inter duos terminos perpendicularium, erit æqualis parti ſecundæ lineæ interceptæ inter alios duos terminos earumdem perpendicularium.

SINT duæ rectæ æquidiſtantes a g, & c q; & ſuper primam a g, ſint ſignata duo puncta a, & r, à quibus ad ſecundam c q, ducantur perpendicolares a c, & r s, quæ propter æquidiſtantiam linearum erunt ad inuicem æquales, & facient etiam angulos rectos cum recta a g, (per ſecundam huius.) Dicitur quod duæ a r, & c s, interceptæ inter ipſas perpẽdiculares erunt æquales ad inuicem; Nam ſi non eſſent æquales, vna ipſarum eſſet longior altera; ſit ergo ſi poſsibile eſt c s, longior, & exceſſus remaneat ab vna parte, ponamus ad partem s, & ſit s t, ita vt per aduerſariũ t c, remaneat æqualis a r, & ducta a t, vterq; angulorũ c a t, t a r, pars recti a, erit acutus, nũc à puncto t, ad a g, ducatur perpendicularis t u, quæ neceſſario cadet



inter r, & a, (in r, enim cadere non poteſt, quoniam angulus t r a, rectus, eſſet pars anguli recti s r a, & ipſi æqualis (cum anguli recti ſint ad inuicem æquales) ſcilicet pars eſſet æqualis toto, quod eſt impoſsibile. Nec vltra r, ponamus in o, cadere nõ poteſt ſecando s r, ponamus in x, nam conſiderato triangulo x r o, quod haberet latus r o, productum in g, angulus x o g, externus cum eſſet rectus, eſſet æqualis angulo x r o, qui eſt rectus, & internus ipſi oppoſitus, quod eſt impoſsibile; Eadem de cauſa nõ poterit cadere in a, nec vltra.) Cum autem a u, pars a r, ſit minor ipſa a r, erit etiam minor recta c t, ab aduerſario poſita æqualis a r. Et quia t u, eſt æqualis c a, ob æquidiſtantiam linearum, & cum t u, ſit perpendicularis ad a g, eſt etiam perpendicularis ad c q, (per ſecundam huius.) Conſideratis duobus triangulis a u t, t c a, quia duo latera a t, t u, vnius, ſunt æqualia duobus lateribus t a, a c, alterius, ſed baſis u a, eſſet minor baſi c t; etiam angulus a t u, contentus à dictis duobus lateribus vnius eſſet minor angulo t a c, contẽto ab antedictis lateribus alterius ipſis correſpondentibus (per 25. primi) & propterea angulus a t c, reſiduum recti u t c, eſſet maior angulo t a u, quod eſt reſiduum recti c a u.

di. e a u. Nunc ducta t r, & conſiderato triangulo t a r, & &t a t c, in quibus per aduerſarium primū latus r a, vnius eſt æquale primo lateri c t, alterius, & ſecundum a t, ad ſecundum t a, ſed angulus t a r, contentus duobus lateribus vnius eſt minor angulo a t c, contento duobus lateribus alterius, ſequitur (per 24. primi) quod baſis t r, ſit minor baſi c a, ſcilicet quod linea c a, ſit maior linea t r, & ideò quælibet duarum t u, & s r, (æqualium c a) eſſet maior eadem t r; Vnde in triangulo rectangulo t u r, quia t u, eſſet longius t r, angulus t r u, pars recti u r s, ideo acutus oppoſitus lateri u t, longiori, eſſet maior t u r, recto oppoſito lateri breuiori t r, ſcilicet angulus acutus eſſet maior recto, ſeu dicamus pars t r u, eſſet maior toto u r s, æqualis t u r (cum quiſq; ipſorū ſit rectus) quod eſt impoſsibile; Vel triangulo rectangulo t s r, conſiderato, quia s r, eſſet longius t r, angulus r t s, acutus (qui eſt pars recti u t s) eſſet maior recto t s r, quod eſt impoſsibile, ergo erit etiam impoſsibile, quod duæ rectæ a r, & c s, poſitæ inter duas perpendiculares c a, & r s, ſint ad inuicem inæquales, ideo erunt æquales.

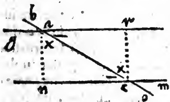
THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

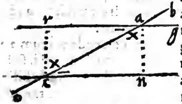
Si ſuper duas rectas lineas æquidiſtantes cadat vna recta vtcūque ſecans ambas, duo anguli interni ab eadem parte formati ſimul ſumpti erunt æquales duobus rectis. Et etiam internus ſuperior ab vna parte erit æqualis interno inferiore ab altera parte. Itē quilibet externorum erit æqualis interno oppoſito ab eadē parte.

Recta a c, ſecet duas æquidiſtantes a r, & n m, in a, & c, Dicitur ſumma duorum angulorum internorum ab eadem parte eſſe æqualis duobus rectis, &c. Ad hæc demonſtranda, a, puncto a, ad rectam n m, ducatur perpendicularis a n, quæ propterea faciet etiā angulos rectos cum recta a r, in a (per ſecundam huius) & ab altero puncto c, ſectionis, ducatur ad a r, perpendicularis c r, quæ ſimiliter (per ſecundam huius) erit etiam perpendicularis rectæ n m, & propterea faciet etiam angulos rectos cum recta n m, & ipſæ duæ perpendiculares a n, & c r, erunt ad inuicem æquales, ex ſuppoſita æquidiſtantia rectarum a r, & n m. Item rectæ a r, & n c, interceptæ à dictis perpendicularibus a n. & c r, erunt ad inuicem æquales (per antecedentem tertiam propoſitionem) Vnde in duobus triangulis rectangulis a r c, & c n a, tria latera vnius ſunt æqualia tribus lateribus ipſis correſpondentibus alterius, ideo (per octauam primi)

Digitized by Google

mi) anguli vnius ſunt æquales angulis ipſis correſpondentibus alterius, ſcilicet r a c-, angulo n c a-, & r c a, x, angulo n a c, x, ſed r a c, & n a c, continent vnum rectum n a r, ſcilicet ſunt æquales vni recto, ideo r a c, & r c a, etiam erunt æquales vni recto, vnde ipſis addito angulo recto r c m, ſumma trium angulorũ r a c, r c a, & r c m, erit æqualis duobus rectis, ſed tres anguli prædicti æquantur duobus internis dextris r a c, & a c m (q a a c m, per ſe, eſt æqualis duobus a c r, & r c m, ſuis partibus, in quibus diuiſus eſt, quæ ipſum integrè continent) ideo duo interni dextri dicti ſunt æquales duobus rectis. Et quia omnes quattuor interni, ſcilicet duo dextri, & duo ſiniſtri ſimul ſunt æquales quattuor rectis (per 13. primi Euclidis) cum iam duo dextri ſint æquales duobus rectis, ſequitur quod duo ſiniſtri, etiam ſint æquales alijs duobus rectis (eſt enim illud, qd remanet ex quattuor rectis dictis.) Vel quia angulus n c a - eſt æqualis angulo r a c -, & iſte r a c, -, ſimul cum angulo n a c, x, continet vnum rectum r a n; angulus etiã n c a - ſimul cum angulo n a c, x, erunt æquales vni recto, ideo ipſis addito angulo recto n a g, ſumma eorum (& eſt, vt totalis g a c, vna cum n c a,) ſcilicet duo interni ſiniſtri, æquabitur duobus rectis. Vel quia n c a - eſt æqualis angulo r a c -, addito communiter g a c, ſumma duorum n c a, & g a c, internorum ſiniſtrorum erit æqualis ſummæ duorum r a c, & g a c, ſed iſta eſt æqualis duobus rectis (per 13. primi) ideo ſumma etiam duorum dictorum internorũ ſiniſtrorum, erit æqualis duobus rectis. Quantum vero ad coalternos angulos attinet, iam oſtenſum eſt, quod angulus r a c - internus dexter ſuperior eſt æqualis angulo n c a - interno ſiniſtro inferiori; Et quantum ad g a c, ipſe componitur ex vno recto, & ex x, ſed ab alio recto, & ab alio x, componitur etiam m c a; ideo iſte m c a, erit æqualis angulo g a c; Vel quia ſumma duorum r a c, & g a c, eſt æqualis duobus rectis, & etiam ſumma duorum n c a, & m c a, eſt æqualis duobus rectis, cum iam oſtẽſum ſit r a c, per ſe æquari angulo n c a, per ſe, ſequitur, quod etiam reliquus g a c, erit æqualis reliquo m c a. Quod etiam quilibet externorum ſit æqualis angulo interno oppoſito ab eadem parte, eſt facile cognitu; nam quo



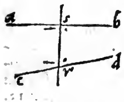


ad b a r,

ad b a r, ipſe eſt æqualis angulo a c m, cum quilibet eorum æquetur angulo g a c, (qui opponitur angulo b a r, per interſectionem rectarum g r, & b c, & ideo eſt æqualis ipſi g a c, (per 15. primi) & eſt coalternus angulo m c a) Idem euenit de altero externo ſuperiore g a b, ſcilicet ob ſimilem cauſam eſt æqualis altero interno inferiori n c a, oppoſito ab eadem parte ſiniſtra; Et ſimiliter angulus m c o, externus erit æqualis interno r a c, & angulus o c n, angulo g a c. Et quando recta a c, ſecans, eſſet perpendicularis ad n m, ſcilicet quod à puncto a, ſectionis in a r, ducendo perpendicularẽ ad n m, ipſa perueniſſet in c, ſcilicet eſſet eadẽ a c, tunc ipſa eadem a c, etiã eſſet perpendicularis ad a r (per ſecundã huius) & ideo tam anguli ad a, quàm ad c, eſſent omnes recti, vnde, & sũma duorũ internorũ dextrorũ, & etiam ſumma duorum internorũ ſiniſtrorum eſſet æqualis duobus rectis; Et ſimiliter etiam quilibet internus ſuperior ab vna parte eſſet æqualis ipſi coalterno, ſeu interno inferiori ab altera parte; Et etiam vnuſquiſq; quattuor externorũ eſſet æqualis ſuo relatiuo, aut correſpondente interno oppoſito ab eadem parte.



Notandum eſt, quod ſuperior propoſitio eſt eadem, cum 29. primi Euclidis, & eſt demſtõrata oſtẽſiuè proprijs medijs, ſcilicet ſine reductione aduerſarij ad impoſsibilia, nec opus habet quinto poſtulato poſito tamquã petitione, ſeu primo principio, quod eſt; Poſtuletur, quod ſi in duas rectas lineas recta linea incidens interiores, & ex eadem parte angulos duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas inter ſe conuenire ex ea parte, in qua ſunt anguli duobus rectis minores. Et ideo ipſum quintum poſtulatum non eſt neceſſarium ad eam demonſtrandam.



Notetur etiam, quod cognoſcitur dictum quintum poſtulatũ, non eſſe accipiendum, vt petitionem, ſeu primum principium, cum non habeat duas partes neceſſarias ad principia prima, quæ ſunt; Eſſe notum ad ſenſum, & eſſe indemonſtrabile. Imo dictum poſtulatum eſt demonſtrabile, & propterea poteſt, ſeu debet accipi vt Propoſitio, quod videtur factum eſſe in hoc Opuſculo, vbi demõſtratur in Propoſitio 12. in qua dicitur. Si duæ rectæ datæ ſecentur à recta, & accidat, quod ſumma duorum angulorum internorum ab vna parte ſit maior, vel minor duobus angulis rectis. Vel quod internus ſuperior ab vna parte ſit inæqualis interno inferiori ab altera par-

ra par-

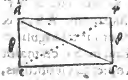
ra parte (qui ſunt coalterni ad inuicem) vel quod externus ſit inæqualis interno oppoſito ab eadem parte, tunc duæ rectæ datæ erunt non æquidiſtantes ad inuicem; Et ſe ſe appropinquabunt à parte, in qua duo anguli interni ſimul iuncti ſunt minores duob. rectis; Seu in qua (qđ eſt idē) internus eſt minor altero interno ipſi coalterno; Seu in qua (quod ſimiliter eſt idem) internus eſt minor externo ipſi oppoſito ab eadem parte.

Cuius propoſitionis, pars illa, in qua dicitur. Quando duæ rectæ datæ ſecantur à recta, ſi accidat, quod ſumma duorum angulorum internorum ab eadem parte ſit minor duobus rectis (ſcilicet, quod duo anguli interni ab eadem parte ſimul ſumpti ſint minores duobus rectis) tunc ipſæ duæ rectæ datæ neceſſariò ſint non æquidiſtantes; eſt (ſuperiori quarta propoſitione mediante) demonſtrata tali pacto. Duæ rectæ datæ, vt proponitur, eſſe non poſſunt æquidiſtantes, quia tunc (per quartam huius) neceſſariò ſumma duorum angulorum internorum ab vna, & eadem parte eſſet æqualis duobus rectis, anguli coalterni eſſent ad inuicem æquales. Et externus eſſet æqualis interno ſibi oppoſito ab eadem parte. Quod totum eſt contra hypotheſim; Cum ergo non poſsint eſſe ad inuicem æquidiſtantes erunt non æquidiſtantes, vt oſtendendum proponebatur.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

Si ſuper datam rectam ducantur duæ perpendiculares æquales, & coniungantur cum vna recta ipſa erit æquidiſtans, & æqualis rectæ datæ ſuper quam duæ perpendiculares inſiſtunt, quæ etiam erunt perpendiculares ad lineā dictam, quæ cōiungit ipſas ſimul.

SVPER datam c s, rectæ a c, & r s, ſint perpendiculares, & æquales, ducaturq; a r; Dicitur ipſa a r, eſſe æquidiſtans, & æqualis rectæ c s; Si enim a r, non eſſet æquidiſtans rectæ c s, eſſet ipſi non æquidiſtans, ideo in vna ipſarū, a r, ſcilicet, ſumptis duobus diuerſis punctis a, & r, ipſa puncta eſſent non æqualiter diſtantia à recta c s; ideo duæ perpendiculares a c, & r s, quæ oſtēdunt diſtātias ipſas eſſent inæquales, ſed illæ inæquales eſſe non poſſunt (cum ex hypotheſi ponantur æquales) ideo nec etiam a r, poterit eſſe nō æquidiſtans rectæ c s, ipſi ergo erit æquidiſtans, & propterea (per ſecundam huius) quælibet duarum a c, & r s, perpendicularis ad rectam c s, erit etiā perpendicularis ad a r, & propterea angulus a, & etiam angulus



r, erit rectus; Nũc ducta recta c r, vel a s, cõſideratisq́; duobus triangulis rectangulis a c s, & a r s, cũ duo latera c a, a s, vnius ſint æqualia duobus lateribus r s, s a, ipſis correſpondentibus alterius, ſequitur (per id quod hic inferius demonſtrabitur) quod reliqui anguli vnius ſint æquales reliquis angulis alterius, & reliquum latus c s, vnius reliquo lateri r a, alterius ſcilicet, vt recta a r, ſit æqualis rectæ c s, ſibi oppoſitæ, vt oſtendere proponebatur.

Duorum triangulorum rectangulorum, quando duo latera vnius ſunt æqualia duobus lateribus ipſis correſpondentibus alterius, reliquum latus vnius erit etiam æquale reliquo lateri alterius, & quilibet aliorum angulorũ vnius erit æqualis angulo ipſi correſpondenti alterius, & triangulum erit æquale triangulo.

IN triangulis rectangulis a r s, & A R S, ſi duo latera continentia angulum r, rectum vnius eſſent æqualia duobus lateribus continentibus angulum R, rectum alterius, etiam reliquum latus vnius (per quartam primi) eſſet æquale reliquo lateri alterius; anguli, angulis, &c. Sed ſint r a, & a s, æqualia lateribus R A, & A S; dicitur, quod etiam R S, erit æquale lateri r s; Nam ſi non eſſent æqualia, vnum ipſorum eſſet longius altero, ſit ergo (per aduerſarium) R S, longius, à quo ſecetur R t, ad æqualitatem r s, ſcilicet, ita vt id in quo R S, excedit r s, remaneat à parte S, & R t (per aduerſarium) euadat æqualem lateri a r, & ideo cum in duobus triãgulis rectangulis a r s, & A R t, duo latera a r, r s, & angulus r, rectus ab eis contẽtus, eſſent æqualia duobus lateribus A R, R t, & angulo R, recto ab ipſis contento, ſequeretur (per 4. primi) quod etiam baſis



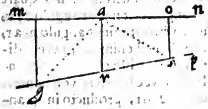
A t, eſſet æqualis baſi a s, ideo eſſet etiã æqualis rectæ A S, (poſitæ æqualis rectæ a s.) Vnde in triangulo A t S, duo latera A t, A s, eſſent ad inuicem æqualia, & propterea duo anguli A S t, & A t S, eſſent ad inuicem æquales, ſed A t S, externus trianguli rectanguli A R t, habentis latus R t, productum in S, eſt maior angulo A R t, interno recto ipſi oppoſito, & propterea eſt obtuſus, ideo etiam angulus A S t, eſſet obtuſus. Et in triangulo A S t, ꝙ habet latus S t, productum in R, angulus A t R, qui eſt externus oppoſitus angulo A S t, interno, eſſet maior ipſo angulo A S t, obtuſo, ſcilicet eſſet obtuſus, ſed angulus etiam A t S, eſt obtuſus, ideo anguli A t R, & A t S, facti à linea A t, cadente ſuper lineam

neam R S, eſſent ambo obtuſi, ſeu quilibet eorum eſſet maior recto, & propterea ſumma eorum eſſet maior duobus rectis, quod impoſſibile eſt (per 13. primi) non poſſunt ergo duo latera r s, & R S, eſſe ad inuicem inæqualia, ideo erunt æqualia, & conſequenter angulus a, erit æqualis angulo A, angulus s, angulo S, & triangulum alteri triangulo.

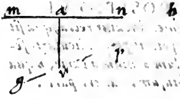
THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

Si ſuper duas rectas datas non æquidiſtantes ducatur recta, quæ ſit perpendicularis primæ, ipſa eſſe non poterit perpendicularis ſecunda, imo cum ſecunda faciet angulum acutum à parte, in qua lineæ datæ ſe ſe appropinquant, & obtuſum ab altera parte.

SInt duæ rectæ datæ non æquidiſtantes m n, & g p, & pars, in qua ipſe ſe ſe appropinquant ſit dextra, ſcilicet verſus n, & p; Et ducta a r, quæ ſecet vtramq; ipſa cum m n, faciat angulos ad a, rectos, Dicitur quod ipſa a r, cum altera ſecunda g p, faciet angulos ad r, non rectos, & quod acutus erit a r s, à parte cuius rectę datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant. Nam ſi (per aduerſarium) anguli ad r, eſſent recti, acceptis r g, & r s, æqualibus, & ductis rectis a s, & a g, conſideratisq; duobus triangulis a r g, & a r s, quæ eſſent rectangula (per aduerſarium) & ideo angulus r, vnius æqualis angulo r, alterius, & duo latera g r, r a, continentia angulum r, vnius, duobus lateribus s r, r a, continētia angulum r, alterius, ſequeretur (per 4. primi) quod baſis a g, deberet eſſe æqualis baſi a s, & reliqui anguli vnius, reliquis angulis alterius vterq; vtrique. Vnde etiam angulus m a g, qui remanet à recto m a r, eſſet æqualis angulo n a s, remanēte à recto n a r. Nunc à punctis s, & g, ductis ad n m, perpēdicularibus s o, & g t, & conſideratis duobus triangulis rectangulis s o a, & g t a, in quibus etiam angulus s a o, vnius eſſet æqualis angulo g a t, alterius, & latus a s, vnius lateri a g, alterius, ſequeretur (per 26. primi Euclidis) quod reliquus angulus a s o, vnius eſſet æqualis reliquo angulo t g a, alterius, latus o a, lateri t a, & etiam latus s o, lateri g t, ſed s o, & g t, quæ ſunt perpendiculares ad m n, oſtendunt diſtantiam rectæ g p, ad m n, in duobus diuerſis punctis g, & s, & quia eſſent æqua-



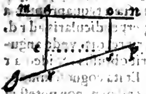
æquales, ſequeretur quod g p, & m n, eſſent æquidiſtantes, quod eſt contra ſuppoſitum, ideo impoſsibile, ergo impoſsibile etiam eſt angulos a r g, & a r p, eſſe rectos, erunt ergo non recti, ſcilicet vnus obtuſus, & alter acutus, vt probare proponebatur; Et acutus erit a r p, ſupponendo rectas, m n, & g p, non æquidiſtantes appropinquari verſus n, & p, & remoueri verſus m, & g, (ſupponendo, ſcilicet, quod g t, ſit longior r a, & r a, longior s o, ſcilicet, quod punctum g, magis diſtet



à recta m n, quàm punctū r, & punctū r, remotius ſit ab ipſa recta m n, quàm punctū s.) Nam cum rectæ datæ ſint propinquiores à parte n p, quā ab altera parte, ſequitur quod ab ea parte productæ ipſæ tandem concurrerent ſimul, conſtituendo angulum, & ponamus hoc euenire in h, puncto, conſiderato à dicta parte dextra diſtante ab a r, (quæ eſt perpendicularis ad m n,) quantumlibet, & ita duæ a h, & r h, cum a r, ſimul formarent triangulum a h r, cuius latus h a, eſſet productum in m, quare angulus m a r, externus eiuſdem trianguli erit maior angulo a r h, interno illi oppoſito, ſcilicet angulus a r h, erit minor angulo m a r, ſed m a r, eſt rectus (ex hypotheſi; poſita eſt enim a r, perpendicularis ad m n,) ideo angulus a r h, minor illo erit acutus, & angulus a r g, ipſi coniunctus erit obtuſus, vt oſtendere volebamus. Vel in triangulo a h r, conſiderato latere h r, producto in g, angulus externus a r g, erit maior angulo r a h, interno ipſi oppoſito, ſed ipſe internus eſt rectus ideo externus a r g, erit obtuſus, & conſequenter a r p, erit acutus, qui eſt ille à parte, in qua duæ rectæ datæ m n, & g p, non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant. Hoc etiam ex ſe (ſine prima ſuperiori demoſtratione, vbi ducitur aduerſarius ad impoſsibile, ſufficere poteſt ad demōſtrandū oſtenſiue, quod recta a r, perpendicularis ad m n, non eſt perpendicularis ad g p; nam probatur angulum a r p, dextrum eſſe acutum, & a r g, ſiniſtrum eſſe obtuſum.

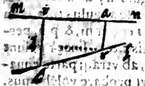
Poterit etiam ab initio demonſtrari propoſitio totalis, tali modo. Sint duæ rectæ datæ non æquidiſtantes m n, & g p, quæ magis ſe ſe appropinquant à parte dextra n p, & ſuper ipſas ducta ſit a r, quæ ſit perpendicularis in a, ad primam m n; Dicitur ipſam non poſſe eſſe perpendicularem ad ſecundam g p; imo, quod cum ipſa ſecunda g p; faciet angulum acutum à parte dextra n p, in qua rectæ datæ ſe ſe appropinquant, & obtuſum ab altera parte, ſcilicet,
dicitur

dicitur angulus a r p, eſſe acutus, & a r g, obtuſus. Et ad hoc



probandum: Ab alio puncto aſſumpto in prima m n, ſeu à parte dextra, ab a, verſus n, ſeu à ſiniſtra ab a, verſus m, ponamus à dextra, & ſit o, ad eandem primam m n, ducatur perpendicularis o s, tam lõga, vt perueniat etiam ad ſecundam g p, & ſit vt perueniat ad ipſam in s, & tunc duæ rectæ s o, & r a, pependiculares ad m n, oſtendent diſtantiam à duobus diuerſis punctis r, & s, ſignatis in g p, ad m n, quæ duæ perpendiculares r a, & s o, erunt inæquales, quoniã ſupponitur duas rectas datas m n, & g p, eſſe non ęquidiſtantes. Amplius, quoniam dicitur ipſæ appropinquari à parte dextra, recta s o, dextra vbi diſtantia illarum eſt minor, erit breuior ſiniſtra a r, nunc ab hac a r, longior, ſumpto principio ab a, vbi facit angulum rectum cum m n, ſecetur pars a c, æqualis rectæ o s, & ducatur c s, & conſideratis duabus rectis c a, & s o, perpendicularib. ambabus ad eandem a o, & æqualibus ad inuicem, quæ ſunt ſimul iunctæ à recta c s, hæc c s, (per quintam huius) erit æquidiſtans, & æqualis dictæ a o, ideo a c, quæ eſt perpẽdicularis ad vnam ipſarum æquidiſtantium a o, erit etiam perpendicularis ad aliam c s. (per ſecundam huius) ſcilicet angulus a c s, erit rectus, & quoniam eſt externus trianguli parui s r c, habentis latus r c, prolungatum in a, ipſe erit maior angulo c r s, interno ſibi oppoſito (per 16. primi Euclidis) ſcilicet angulus c r s, erit minor angulo a c s, recto, ideo ipſe c r s, erit acutus, ſed hic eſt angulus factus ab a r, cum recta g p, ſecunda duarum datarum non ęquidiſtãtium, ſe ſe appropinquantium à parte n p, dextra à qua eſt angulus iſte. ideo cognoſcimus a r, non eſſe perpendicularẽ ad ſecundã datã g p; imo cum ipſa g p, facere angulũ acutum à parte dextra, in qua duæ rectæ datæ ſupponuntur appropinquari, obtuſus ergo erit alter a r g, ſiniſter (per 13. primi) à qua parte ſiniſtra duæ rectę datæ non æquidiſtantes ab inuicem remouentur.

Et ſi in prima linea m n, eſſet aſſumptum punctum t, à parte ſiniſtra, à qua duæ rectæ datæ m n, & g p, non æquidiſtantes ſe ſe remouent, & ab ipſo puncto t, ad m n, ducta perpendicularis t g, perueniens ad g p, in g, tũc (quia iſta t g,) eſſet longior a r, (cum duæ rectæ datę ex hypotheſi ſint remotiores à parte ſiniſtra, quàm à dextra) ab ipſa t g, incipiendo à puncto t, vbi ipſa facit angulum rectum



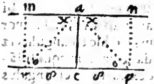
cum

cum m n, ſecaretur pars t d, æqualis rectæ a r, & ducta r d, ipſa (per quintam huius) erit æquidiſtans, & æqualis rectæ a t, quapropter a r, quæ eſt perpendicularis ad a t, erit etiam perpendicularis ad r d, (per ſecundam huius) ſcilicet angulus a r d, erit rectus, vnde angulus a r g, qui eſt maior dicto recto ſua parte erit obtuſus, & ideo a r p, ipſi coniuncto (per 13. primi) erit acutus. Et ita cognoſcimus etiam, quod recta a r, exiſtens perpendicularis ad m n, non poteſt eſſe perpendicularis ad g p, imo facit angulum acutum cum ipſa g p, à parte dextra p, in qua duæ rectæ datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant, & obtuſum à parte ſiniſtra g, in qua ſe ſe remouent, quod oſtendendum erat.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

Si ſuper duas rectas datas cadat rectam, quæ ſit perpendicularis ad ambas, neceſſe eſt, vt ipſa duæ rectæ datæ ſint ad inuicem æquidiſtantes.

SVper datas m n, & r p, cadat a c, & eueniat, vt quilibet angulorum ad a, & ad c, ſit rectus, dicitur m n, & r p, eſſe æquidiſtantes ad inuicem, quod ſic demonſtratur; Acceptis c p, & c r, æqualibus à punctis p, & r, ad m n, ducantur perpendiculares p n, & r m,



vt anguli ad m, & ad n, ſint recti, ducantur quæ r a, & p a; conſideratisq; duobus triãgulis rectangulis r c a, & p c a, duo latera r c, c a, cum ipſorum angulo recto, erunt æqualia duobus lateribus p c, c a, ipſiq; angulo recto, ideo (per quartã primi) r a, erit æqualis rectæ p a, angulus a r c, angulo a p c, & angulus r a c, angulo p a c, ideo dempto angulo r a c, à recto m a c, & p a c, à recto n a c, duo anguli, qui remanent r a m, & p a n, erunt æquales ad inuicẽ. Et in duobus trtangulis rectangulis r m a, & p n a, quia duo anguli angulim, & a, vnius cum latere r a, ſunt æquales duobus angulis n & a, alterius cum latere p a, ſequitur (per 26. primi) quod reliquus angulus m r a, vnius erit æqualis reliquo angulo n p a, alterius, & latus r m, lateri p n, & latus m a, lateri n a, vnde angulus totalis m r c, etiam erit æqualis totali angulo n p c, quia ergo r m, & p n, perpendicularis ad m n, à duobus diuerſis punctis r, & p, lineæ r p, ſunt ad inuicem æquales ſequitur, quod recta r p, ab vtraq; parte æqualiter diſtet, ſcilicet ſit æquidiſtãs rectæ m n, vt probare volebamus. Cognoſcitur etiam, quod ob eandem rationem, vel cauſam, quia ſu

per

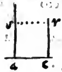
per n p, & a c, cadit n a, ꝑpendicularis ad ambas, ob id ſequitur, q̃d n p, ſit æquidiſtans rectæ a c. Amplius videtur etiam, quod, cum ſuper duas æquidiſtantes m n, & r p, cadant r m, & p n, perpendiculares ad m n, ipſæ erunt etiam perpendiculares ad r p, & ideò angulus m r p, erit rectus, & etiam rectus erit n p r.

Seu ad demonſtrandam ſuperiorem propoſitionem dici poterit Si duæ rectæ m n, & r p, non eſſent æquidiſtantes, illæ eſſent non ęquidiſtantes, & ideo recta a c, quæ eſt perpendicularis ad m n, vna ipſarum non poterit eſſe perpendicularis ad alteram r p, (per ſextã huius) ſed ſuppoſitum eſt, quod ipſa a c, ſit etiam perpendicularis ad r p, ideo a c, non poterit non eſſe perpendicularis ad r p, vnde nec etiam poterit ipſa r p, non eſſe æquidiſtans ad m n, ergo erit ipſi æquidiſtans.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

Si ſuper rectam datam cadant duæ perpendiculares, illæ ad inuicem erunt æquidiſtantes.

SVper datam a c, ſint perpendiculares duæ rectæ a s, & c r, Dicimus illas eſſe ad inuicem æquidiſtantes, quod ſic demonſtratur.

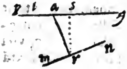


Faciamus ipſas duas perpendiculares æquales (à longiori ſecando partem æqualem minori) & ſit a s, æqualis c r, coniunganturq; duo puncta r, & s, cũ recta r s, q̃ (per 5. huius) erit æqualis, & ęquidiſtans rectæ a c, anguliq; r, & s, erunt recti, vt anguli c, & a (per quartam huius) vnde etiam quælibet duarum rectarum c a, & r s, erit perpendicularis cuilibet rectarum c r, & a s; & ideo quælibet duarum c a, & r s, (per corollarium primæ huius) oſtendet diſtantiam rectæ c r, ad rectam a s, in duobus diuerſis punctis c, & r, ſumptis in recta c r, vel oſtendet diſtantiam rectæ a s, ad rectam c r, in duobus diuerſis punctis a, & s, ſumptis in recta a s, ſed ipſæ c a, & r s, ſunt æquales ad inuicem, ideo etiam duæ c r, & a s (per ſecundam definitionẽ) erũt æqualiter diſtantes, ſeu æquidiſtantes ad inuicem.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

Si duæ rectæ datæ ſint nõ æquidiſtantes, & à puncto in prima ſignato ducatur perpendicularis ad ſecundam, & à puncto à quo ipſa perpendicularis peruenit ad ſecundam ducatur recta perpendicularis ad primam, hæc vltima perpendicularis erit breuior antecedente perpendiculari, & cadet inter antecedentem, & illam partem, in qua datæ rectæ ſe ſe appropinquant.

Sint duæ rectæ datæ non æquidiſtantes p g, prima, & m n, ſecunda, quæ ſe ſe appropinquant à parte g n, & à puncto a, in prima ſignato ducatur a r, perpendicularis ad ſecundam, & ita cum angulus a r n, ſit rectus, g a r, erit acutus (per ſextam huius) Núc à puncto r, ducta recta perpendiculari ad primam p g, ipſa neceſſario cadet inter a, & g, quoniam ſuper ipſam r a, cadere non poteſt, quia tunc angulus r a g, eſſet rectus, & iam ſcimus ipſum debere eſſe acutum; nec inter a, & p, cadere poteſt, nam ſi hoc fieri poſſet per aduerſarium, & ponatur peruenire in t, ſcilicet angulum r t a, eſſe rectum, ſequeretur, quod conſiderato triangulo rectangulo r t a, habente latus t a, productũ in g, angulus externus g a r, eſſet minor interno oppoſito a t r, ſcilicet acutus recto, quod eſt impoſsibile, cadet ergo inter a, & g, (ſcilicet à parte perpendicularis r a, in qua rectæ datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant) & ſit r s, & ita angulus r s a, erit rectus, ideo maior angulo s a r, acuto, vnde in triangulo rectangulo r s a, quia, angulus a, acutus eſt minor angulo s, recto, etiam latus r s, acuto oppoſitum, erit breuius latere a r, recto oppoſito (per 19. primi Euclidis) ſcilicet recta r s, quæ eſt perpendicularis primæ lineæ, erit breuior recta a r, quæ eſt perpendicularis ſecũdæ.

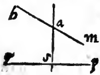


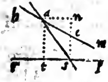
THEOREMA X. PROPOSITIO X.

Si duæ rectæ datæ non æquidiſtantes ſecentur à recta, duo anguli interni à parte, in qua rectæ datæ ſe ſe appropinquant ſimul iuncti, ſcilicet ſumma illorum erit minor duobus angulis rectis, ſumma vero duorum angulorum internorum ab altera parte, in qua datæ rectæ remotiores ſunt, erit minor duobus angulis rectis. Item angulus externus à parte, in qua duæ rectæ datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant, erit minor angulo interno ipſi coalterno ab altera parte; ſcilicet ex coalternis minores erunt illi, qui ſunt à parte, in qua datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquãt, et maiores illi, qui ſunt ab altera parte, in qua rectæ datæ remotiores euadunt. Item quilibet angulorum internorum à parte, in qua rectæ datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant, erit minor angulo externo ipſi oppoſito ab eadem parte, ſed ab altera parte, in qua ipſæ rectæ remotiores euadunt, erit contrariũ ſcilicet quilibet duorum angulorum internorum erit maior externo oppoſito à dicta eadem parte.

Super

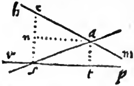
SVper duas rectas datas h m, & r p, non æquidiſtantes, imo propinquiores à parte m p, quam à parte h r, ducatur recta a s, vtcunque ſecans ambas in a, & s; dicitur angulos internos m a s, & p s a, eſſe minores duobus rectis; quia à puncto a, ducta recta perpendiculari ad r p, ipſa vel cadet in punctū s, ſcilicet erit eadē cum recta a s, vel trāſibit verſum parte r, ſiniſtram, vel verſus partem p, dextram. Si ceciderit in punctum s, ſcilicet vt a s. ſit perpendicularis rectæ a p, illa tunc (per ſextam huius) cum altera linea h m, inæquidiſtante rectæ r p, faciet angulum acutum à parte





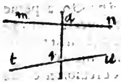
m, dextra, in qua ipſæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant, & obtuſum à parte h, ſiniſtra, à qua ſe ſe remouent (ſcilicet angulus m a s, erit acutus, & ideò iuncto recto p s a, ſumma (ab hac parte dextra, in qua rectæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant) erit minor duobus rectis, & angulus h a s, erit obtuſus, ideo iuncto recto a r s, ſumma (à parte ſiniſtra, à qua rectæ non æquidiſtantes ſe ſe remouent) erit minor duobus rectis. Sed ſi p̄pendicularis ad r p, diſcedens à puncto a, perueniat, ad r p, in t, ſiniſtro ad s, tunc à puncto s, ducatur s c, p̄pendicularis ad ipſam r p; & cum datæ h m, & r p, non ſint æquidiſtantes, imo propinquiores à parte m p, ſequitur dictas duas p̄pendiculares t a, & s c, ad r p, eſſe inæquales, & breuiorem exiſtere s c, Nūc hęc s c, p̄ducatur vltra ad c, quouſq; fiet ęqualis rectę t a, & hoc eueniat in n, ſcilicet, quod s n, ſit æqualis rectæ t a, & ducatur n a, quæ (per quintam huius) erit æqualis, & æquidiſtans rectæ t s, & ideo cum a n, & t s, æquidiſtantes ſint ſectæ à recta a s, angulus n a s, erit æqualis ſibi coalterno t s a, ſcilicet internus ſuperior dexter interno inferiori ſiniſtro (per quartam huius) ſed angulus c a s, pars anguli n a s, eſt minor ipſo n a s, ideo erit etiam minor angulo t s a, vnde communiter iuncto angulo a s p, ſumma duorū c a s, & a s p (qui ſunt duo interni à parte dextra, in qua duæ rectæ datæ ſe ſe appropinquant) erit minor ſumma duorum t s a, & a s p, ſed hæc ſumma eſt æqualis duobus rectis (per 13. primi) ideo illa erit minor duobus rectis. Et conſequenter alij duo anguli interni ſiniſtri h a s, & r s a, qui remanent è dextris ad quattuor rectos vſque erunt maiores duobus rectis. Et quando recta perpendicularis ad r p, diſcendens à puncto a, perueniat ad ipſam in t, dextro ab s, tunc à puncto s, ducatur s c, perpendicularis ad eandē r p, quod cum datæ h m, & r p, ſint non æquidiſtantes, imo propinquio-

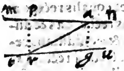
quiores à parte m p, ſequeretur dictas duas perpendiculares s t, & t a, ad r p, eſſe inæquales,& s c, eſſe longiorem t a, Nunc ab hac s c, incipiendo à puncto s, ſecetur pars s n, æqualis rectæ t a,& ducatur a n, quæ(per quintam huius)erit æqualis,& æquidiſtans rectæ s t, quare cũ hæ duæ æquidiſtantes n a, & s t, ſectæ ſint à recta a s, angulus a s t, erit æqualis ſuo coalterno n a s, ſed hic n a s, eſt pars anguli c a s, ideo minor ipſo, ergo etiam a s t, erit minor eodem c a s, vnde communiter iuncto angulo m a s, ſumma duorum t s a, & m a s (qui ſunt duo interni dextri, rectarũ h m, & r p, ſectarum ab a s) erit minor ſumma duorum c a s, & m a s, ſed hæc eſt æqualis duobus rectis (per 13. primi) ideo illa erit minor duobus rectis. Et per conſequens ſumma duorum angulorũ internorum ſiniſtrorum c a s, & r s a, erit maior duobus rectis.



Hæc prima pars huius Propoſitionis poteſt etiam demonſtrari modo ſequenti.

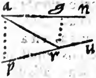
Secet recta a r, duas datas nõ æquidiſtãtes m n,& t u, ſe ſe appropinquãtes verſus n u, quæ a r, cum m n, à parte n, faciet angulum rectum, vel obtuſum, vel acutum. Si rectum, tunc alter internus dexter a r u, erit acutus (per ſextam huius) & propterea ſumma ipſorum duorum internorũ dexterorum n a r, & u r a, erit minor duobus rectis. Si n a r, ſit obtuſus, ab ipſo ſecetur rectus n a g, ducendo ad m n, in a, perpendicularem a g, & ita angulus a g u (per ſextam huius) erit acutus, & ab r, ad m n, ducatur perpendicularis r p (quæ erit longior recta g a) & angulus p r u, erit acutus, & quia g a, & r p, ſunt perpendiculares ad m n, ipſæ erunt æquidiſtantes ad inuicem (per octauam huius) vnde cum ſint ſectæ ab a r, angulus p r a, erit æqualis ſuo coalterno r a g, & quia ſumma angulorum p r a, & a r g, eſt angulus p r g, acutus, etiam ſumma angulorum a r g, & r a g, erit acutus, vnde ipſis addito recto n a g, ſumma illorũ cum ipſo recto, ſcilicet n a r, & u r a, erit minor duobus rectis. Vel quia ſuper p r, & a g, æquidiſtantes cadit recta t u, angulus externus a g u, acutus, erit æqualis interno oppoſito p r u, ſed hic angulus eſt æqualis ſummæ duorũ a r g, & r a g (quia propterea æquidiſtantiam rectarum p r, & a g, ſectarum ab a r, angulus r a g, eſt æqualis ſuo coalterno p r a, & iſte p r a, cum a r g, compo



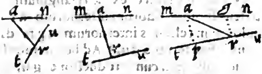


nunt

:totalem angulum acutum p r g) ideo etiam angulus a g u, a-
s, erit æqualis ſummæ duorũ a r g, & r a g, vnde ipſi addito re-
n a g, ſumma ipſius acuti cum recto, quæ ſumma eſt minor duo
rectis erit æqualis ſummæ angulorum n a r, & a r u; ſcilicet hi
anguli interni dextri rectarum m n, & t u, ſectarum ab a r, e-
minores duobus rectis. Et quando angulus n a r, ſit acutus,



tunc ipſi tantum addatur, vt euadat rectus, ſci-
licet ducatur ad m n, à puncto a, perpendicu
laris a p, quouſque perueniat ad t u, & angu-
lus a p u, erit acutus (per ſextam huius) item
à puncto r, eidem rectę m n, ducatur perpen-
laris r g (quæ erit breuior recta p a.) & angulus g r u, erit a-
s, & quia ipſæ duæ rectæ p a, & r g, perpendiculares ad rectam
ſunt ad inuicem æquidiſtantes (per octauam huius) & ſectæ ab
ngulus g r a, erit æqualis ſuo coalterno p a r, & ideo ſumma
lorum g r a, & g a r, erit æqualis ſummæ p a r, & r a g, ſcilicet
cto, vnde ipſis addito g r u, acuto, sũma triũ g a r, a r g, & g r
 æquipollet duobus internis n a r, & u r a) non perueniet ad
rectos, ſcilicet erit minor duobus rectis. Vel quando angulus
ſit acutus, tunc a r u, erit acutus, vel rectus, vel obtuſus; ſi a-
, vel rectus, sũma ipſius cũ angulo n a r, acuto erit minor duo-
ctis; ſi obtuſus ſecetur ab ipſo angulus rectus g r u, & à pun-
, ducatur perpendicularis a p, ad rectam t u, quæ pro-
a erit æquidiſtans rectæ r g, & angulus p a n, erit acutus,

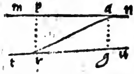


vt eſt r g n, An-
gulus p a r, erit
æqualis ſuo coal-
terno a r g, & ideo
angulus a r g, ſi-
mul cum angulo
erunt æquales angulo p a g, ſcilicet ſumma illorum erit minor
cto (cum p a g, ſit acutus) quæ cum angulo g r u, recto faciẽt
am minorem duobus rectis, ſed tres anguli dicti g a r, a r g, &
g r u, ſunt æquipollentes duobus n a r, & a r u (quia a r u,
et rectum g r u, & a r g, partes eius totales) ideo cognoſci-
os duos angulos n a r, & a r u, in ſumma eſſe minores duobus
vt oſtendere volebamus. Et per conſequens modo quolibet
o m a r, & t r a, interni à parte, à qua datæ non æquidiſtan-
e remouent, erunt in ſumma maiores duobus rectis.

COROLLARIVM.

Hinc cognoſcitur, quod quando vnum ex lateribus triãguli eſt productum, angulus externus, qui formatur eſt æqualis ſummæ duorum oppoſitorum internorum in triangulo.

QVIA ſuperius in figura hic reſcripta cum probatum ſit angulum u g a, eſſe æqualem angulo u r p, (ob æquidiſtantiam rectarum r p, & g a, ſectarum ab u r; quod u g a, eſt angulus externus, & p r u, eſt internus oppoſitus ab



eadẽ parte) & hic u r p, ſit æqualis duobus g r a, & a r p, ſuis partibus, quod eſt ac ſi dicamus duobus g r a, & r a g, (cum r a g, ſit æqualis ſuo coalterno a r p, ex æquidiſtantibus r p, & g a, ſectis ab r a) cognoſcimus, quod etiã u g a, erit æqualis eiſdem duobus g r a, & r a g, qui ſunt duo interni oppoſiti in triãgulo a r g, habente latus r g, productum in u.

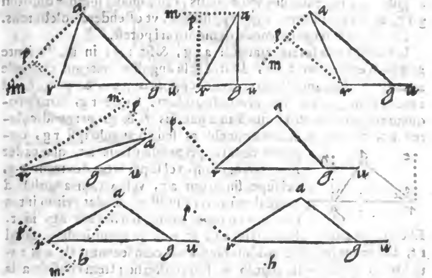
Poterit etiam oſtendi ipſa prima pars ſuperioris propoſitionis, alio modo, ſi prius demonſtretur ſequens.

LEMMA.

Cuiuslibet trianguli producto vno latere quouis, angulus externus erit æqualis ſummæ duorum internorum in triangulo ipſi oppoſitorum.

TRIANGVLI a r g, productum ſit latus r g, in u, conſtituendo angulum externum (ſcilicet extra triangulum a g u. Dicitur ipſum eſſe æqualem ſummæ duorum internorum a, & r, oppoſitorum in triangulo (nam reliquus internorum a g r, dicitur coniunctus, ſeu aſſociatus ipſi externo a g u.) Ad hoc demonſtrandum; Ad latus a g, faciẽs angulum cum productione g u, à parte ſuperiori a, verſus partem r, ducatur perpẽdicularis a m, Et à puncto r, ſcilicet ab altera extremitate lateris producti per g, in u, ducatur perpẽdicularis ad a m, & ſit r p; Vnde cum qualibet duarũ rectarum r p, & g a, ſit perpendicularis ad a m, ipſæ duæ rectæ erunt æquidiſtantes ad inuicem (per octauam huius) & quia ſectæ ſunt ab r u, angulus a g u, externus erit æqualis angulo p r g, interno oppoſito ab eadem parte; Et etiã quia duæ æquidiſtantes r p, & g a, ſectæ ſunt ab a r, angulus r a g, erit æqualis ſuo coalterno p r a, vnde ipſis addito communiter angulo a r g, ſummæ duorum p r a, & a r g, & ideo totali angulo p r g, erit æqua-

æqualis ſumma duorum r a g, & a r g, interni in triangulo, ſed ei-



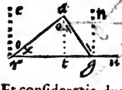
dem angulo p r g, eſt æqualis externus a g u, ideo ipſe a g u; etiam erit æqualis ſummæ dictorum duorum internorum a, & r. Et ſi perpẽdicularis, quæ à puncto a, duceretur ad a g, eſſet a r, ſcilicet alterum latus trianguli g a r, ſcilicet, quod angulus a, internus eſſet rectus, tunc à puncto r, ducta à ſuperiori parte recta r p, perpendiculari rectæ r a, ſimiliter eodem modo diceretur, q. exiſtentibus r p, & a g, perpendicularibus eidem a r, ipſæ ad inuicẽ eſſent æquidiſtãtes, & propterea cũ ſint ſectæ à recta u r, angulus a g u, erit æqualis angulo p r g; & etiam cum ſint ſectæ à recta a r, angulus p r a, erit æqualis angulo a, ideo totus angulus p r g, & ideo a g u, erit æqualis, & angulo a, & angulo a r g, ſcilicet ſummæ duorum internorum a, & r; Et ſi perpendicularis, quæ à puncto a, duceretur ad latus a g, tranſiret per triangulum, ſcilicet, vt angulus r a g, eſſet obtuſus, tunc ipſi perpendiculari tranſeunti per triangulum, & productæ quantum conuenit, ducatur à puncto r, perpendicularis r h, & hæc à parte ſuperiori, ſcilicet ab r, aliquantulum producatur ad libitum, & ſit in p, vſq; & tunc ſimiliter conſideratis rectis h p, & g a, perpendicularibus eidem a h, ipſe erunt ad inuicem æquidiſtantes, & cum ſint ſectæ ab u r, angulus externus a g u, erit æqualis interno illi oppoſito ab eadem parte p r u. Item duæ dictæ æquidiſtantes r p, & a g, cum ſint ſectæ ab a r, angulus g a r, erit æqualis ſuo coalterno

pra.

pra, ideo addito cõmuniter a r g, totalis angulus p r g, & ideo angulus a g u, externus ipſi æqualis, erit æqualis ſummæ duorum g a r, & a r g, internorũ ipſi oppoſitorũ, vt oſtendere volebamus.

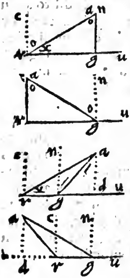
Idem etiam ſequenti modo demonſtrari poteſt.

Producto vno latere trianguli a r g, & ſit r g, in u, faciente angulum externum a g u, dicitur ipſe angulus externus ex ſe eſſe æqualis duobus angulis internis ſibi oppoſitis g a r, & g r a, ſimul iunctis trianguli; Ad hoc demonſtrandum. Super r g, latus productum quantũ occurrit, ducatur à punctis r, & g, perpendiculares r c, & g n, & etiam à puncto a, ſeu ab angulo ipſi r g, oppoſito ducatur perpendicularis a t, quæ cadet



intus triangulum, vel ſuper latus dextrum a g, vel ſuper ſiniſtrum a r, vel extra triangulum à parte dextra, vel à ſiniſtra. Cadat primo intus triangulum ſuper baſim, ſeu lineam r g, in t. Et conſideratis duabus rectis a t, & r c, perpendicularibus ad r t, illæ erunt inter ſe æquidiſtantes, vnde cum ſecentur ab a r, angulus o, erit æqualis angulo o, ſuo coalterno; Item conſideratis duabus g n, & t a, perpendicularibus ad rectam t g, illæ erunt æquidiſtantes ad inuicem, & quia ſecantur ab a g, angulus – erit æqualis ſuo coalterno - vnde totalis angulus a, ſeu r a g, erit æqualis duobus c r a, & n g a, & communiter addito angulo x, ſumma totius anguli a, cum x, ſcilicet duorum internorum a, & r, in triangulo r a g, erit æqualis tribus angulis c r a, a r t, & n g a, ſed duobus c r a, & a r t, conſtituentibus rectum c r t, eſt æqualis angulus n g u, (vel quia eſt rectus, vel quia conſideratis duabus rectis r c, & g n, perpendicularibus eidem r g, & propterea æquidiſtãtibus ad inuicem, ſectæ à recta r u, angulus n g u, externus eſt æqualis angulo c r u, interno ipſi oppoſito ab eadem parte) ideo huic n g u, addito a g n, & ſic conſtituitur totalis externus a g u, ſumma, ſcilicet hic a g u, eſt quantum tres dicti anguli, & ideo quantum duo interni g r a, & g a r; Cadat nunc perpendicularis, quæ à puncto, ſeu à ſummitate a, trianguli (oppoſita lateri r g, ipſius producti) perueniat ad dictã baſim, ſeu lineam productam ſuper latus dextrum a g, ſcilicet ſit vna, & eadem linea cum latere a g, quod latus ob hoc faciet angulos rectos cum recta r u, & erit etiam vna, & eadem linea cum illa, quæ à puncto g, duceretur perpendicularis rectæ r g; & quia, & hæc g a, & r c, ſunt perpendiculares rectæ r u, ipſæ erunt æquidiſtantes ad inuicem, & cum ſecetur à recta u r, angulus externus u g a, (qui nunc eſt re-

ctus) erit æqualis interno ipſi oppoſito c r u, Et quia etiam eædem æquidiſtantes g a, & r c, ſunt ſectæ ab r a, angulus o, erit ęqualis angulo o, ſibi coalterno, quapropter addito communiter angulo x, totus angulus c r g, & ideo externus a g u, erit æqualis duobus o, & x, ſeu g a r, & g r a, internis in triangulo oppoſitis angulo u g a. Et ſi ab a, ducendo perpendicularem ad rectam r g, ipſa cadat in r, ſcilicet ſit vna cum latere a r, & ideo ſit illa ipſa linea etiam, quæ à puncto r, ſe extolleret perpendiculariter ad r g, tunc, quia hæc, & g n, perpendicularis ad eandem r g, in g, erunt ad inuicem æquidiſtantes, & ſectæ ab a g, angulus a, erit æqualis angulo a g n, ſibi coalterno, vnde communiter addito angulo r, anguli a, & r, interni trianguli erunt æquales angulis r, & a g n, ſed n g u, eſt æqualis angulo r, ideo ipſe n g u, cum angulo a g n, & conſequenter totus externus a g u, ab illis formatus, erit æqualis angulis a, & r, internis oppoſitis in triangulo ſimul ſumptis. Et quando à puncto a, ducta recta perpendiculari rectæ r g, ipſa cadat extra triangulum ponamus à parte dextra in d, ſuper productione g u, tunc conſideratis duobus rectis c r, & a d, ppendicularibus rectę r u, & ideo æquidiſtantibus ad inuicem ſectis à recta r a, dicetur angulus c r a, eſſe æqualis ſuo coalterno d a r, & communiter addito a r g, totus c r d, rectus erit æqualis duobus d a r, & a r g, & ideo etiam angulus n g d, rectus, æqualis c r d, erit æqualis eiſdem duobus d a r, & a r g, Nunc conſideratis duabus rectis g, n, & d a, perpendicularib. rectæ r u, & ideo ęquidiſtantibus ad inuicem ſectis à recta g a, angulus n g a, erit æqualis ſuo coalterno d a g, vnde ab angulo n g d, recto, dempto n g a, eius parte (& remanebit a g d) & à ſumma duorum a r g, & d a r, dempto angulo d a g, parte anguli d a r, (& remanebunt g a r, & a n g) reſiduum ab vna parte erit æquale reſiduo ab alia, ſcilicet ſolus angulus a g d, qui eſt externus trianguli erit æqualis duobus g a r, & a r g, qui ſunt interni ipſi oppoſiti in ipſo triangulo. Et ſi perpendicularis ad baſim, ſeu latus productum trianguli ducta à puncto a, cadat extra triangulum à parte ſiniſtra ponamus in d (ſupponendo, quod recta g r, ſit producta ab ipſa parte ſiniſtra r, quãtum ſufficit, vt poſsit recipere dictam perpendicularem a d) Conſi



deratis

deratis duabus rectis d a, & r c, perpendicularibus rectę d u, & ideo æquidiſtantibus ad inuicem, ſectis à recta a r, videbitur angulus d a r, eſſe æqualis ſuo coalterno c r a, & vni parti addito angulo a d r, & alteri parti addito angulo c r g, qui anguli ſunt recti, & ad inuicem æquales, ſumma duorum r a d, & a d r, erit æqualis ſummæ duorum c r a, & c r g, ſcilicet totali a r g (interno in triangulo) ab ipſis compoſito, & amplius cuilibet parti addito communiter angulo g a r, ſumma ab vna parte, ſcilicet tres anguli a d r, r a d, & g a r, quod eſt, ac ſi dicamus duos angulos a d r, & g a d (quia g a d, continet in ſe præciſè angulos r a d, & g a r) erit æqualis ſummæ alterius partis, ſcilicet duobus internis a r g, & g a r; Et quia angulus n g a, eſt æqualis angulo g a d (ſuo coalterno in lineis g n, & d a, perpendicularibus rectæ d u, & ideo æquidiſtantibus ad inuicem ſectis à recta g a) & angulo a d r, recto eſt æqualis angulus n g u, rectus, ſequitur ꝙ etiam ſummã horũ duorum n g a, & n g u, & ideo totalis angulus a g u, externus (trianguli) ab ipſis formatus ſit æqualis ſummę eorundem duorum a r g, & g a r, internorum in triangulo oppoſitorum, quod opportebat demonſtrare.

COROLLARIVM.

Ex demonſtratis perſpicuum eſt. Tres angulos cuiuſcunque trianguli ſimul ſumptos eſſe æquales duobus rectis.

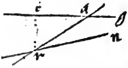
QVoniam cum notum ſit angulum externum (vno latere quouis producto) eſſe æquale duobus internis, & oppoſitis, & quia ipſe internus ſimul cum reliquo interno ipſi coniuncto ſemper componit ſummã æqualem duobus rectis (per 13. primi) ſequitur, quod etiam duo interni dicti cum ipſo reliquo interno, ſcilicet quod omnes tres anguli interni trianguli ſint æquales ſimiliter duobus rectis.



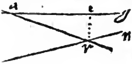
Vel (& ſit in triangulo a r g) ponamus eſſe baſim vnum ex lateribus, vel vnam & lineis ipſius trianguli, ſuper quam poſſit cadere in triangulum perpendicularis ab angulo oppoſito ipſi lateri, & ſit latus r g, & à puncto a, ducta perpendiculari a t, lateri r g, & etiam à punctis r, & g, terminantibus baſim, ductis perpendicularibus r c, & g n, ipſi baſi; quia ex duobus partibus anguli a, pars t a r, eſt æqualis angulo c r a, & ipſe c r a, cum a r t, ſiniſtro interno ſuper baſim ꝑpoſiti trianguli a r g, componunt, vel conſtituunt rectum c r t, ſcimus etiam dictum a r g, ſiniſtrum cum parte ſiniſtra r a t, anguli r a g, neceſſario eſſe æqua-
lem

vno angulo recto. Similiter alia pars dextra g a t, anguli r a g, qualis angulo n g a, & ipſe n g a, cum angulo a g t, dextro in-o, ſuper baſim propoſiti triãguli a r g, cōponūt rectum n g t, ›ropter videmus etiam dictum a g r, dextrum, cum parte de- g a t, anguli r a g, neceſſario eſſe æqualé vni recto, vnde totus ılus r a g, ſimulcum duobus a r g, & a g r, ſcilicet tres anguli ›oſiti trianguli erunt neceſſario æquales duobus angulis rectis. 'unc ad demonſtrandum ſupradictam primamp artem decimæ ›oſitionis, ſuperiori medio; poterit dici.

:CET a r, duas rectas non æquidiſtantes p g, & q n, quæ ſe ſe appropinquāt à parte dextra g n; Dicitur, ſumma duorum ılorum internorum dextrorum, ſcilicet à parte, in qua ipſe ſe ſe ·opinquant ſimul iunctorum eſſe minor duobus rectis. Ad hoc



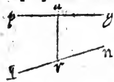
demonſtrandum; A puncto a, ad rectam q n, vel à puncto r, ad rectam p g, ducatur perpēdicularis r t, & ſit quod perueniat ad p g, in t, à parte ſiniſtra ab a, & tunc conſiderato triangulo rectangulo a t r, cuius latus t a, eſt productū, ſcimus angulum g a r, externum ipſius trianguli eſſe æqua- ſummæ duorum a t r, & a r t, internorum oppoſitorum, ideo muniter addito angulo n r a, ſumma angulorū g a r, & n r a, æqualis ſummæ trium angulorū a t r, a r t, & a r n, ſeu ſum- luorum a t r, & t r n, (ponēdo angulum t r n, loco duorum & a r n, partes ipſius, quæ componunt ipſum totaliter) ſed na duorum a t r, & t r n, eſt minor duobus rectis, nam cum ſit rectus t r n, eſt acutus (per ſextam huius) quapropter e- ſumma duorum g a r, & n r a, internorum dextrorum lineadatarum non æquidiſtantium eſt minor duobus rectis. Et ſi à to r, ducta perpēdiculari ad rectam p g, ipſa caderet à par-



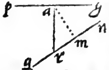
te dextra ab a, & eſſet r t, alterius figuræ, tunc conſiderato triangulo a t r, rectangulo, habente latus a t, productum in g, angulus g t r, externus erit æqualis duobus internis t a r, & t r a, ideo muniter addito angulo t r n, ſumma trium t a r, t r a, & t r n, ·ō duorum t a r, & a r n, (poſito a r n, loco duorum t r a, ·n, partes ipſius) erit æqualis ſummæ duorum g t r, & t r n, ımma horum eſt minor duobus rectis (cum g t r, ſit rectus per ructionem, & ideo t r n, acūtus (per ſextā huius) quapropter

 etiam

etiam ſumma duorum t a r, & a r n, internorum dextrorum duarum datarum linearum non æquidiſtãtium ſe ſe appropinquantium à dicta parte dextra erit minor duobus rectis. Et ſi à puncto r, ducta perpendiculari ad rectam p g, perueniſſet in a, ſcilicet, quod



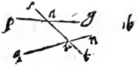
eadem ſecans a r, eſſet perpẽdicularis ad p g, tunc, quia (per ſextam huius) exiſtente angulo g a r, recto, angulus a r n, eſſet acutus (cum ex hypotheſi datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquent ab ipſa parte) clarè perſpicitur ſummam ipſorum duorũ angulorum g a r, & a r n, ſcilicet vnius

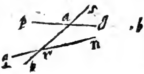


recti, & vnius acuti eſſe minorem duobus rectis. Vel quando a r, ſit perpendicularis ad rectã p g, (ſcilicet ad vnam duarum datarum non æquidiſtantium) ſcilicet exiſtente angulo g a r, recto, tunc à puncto a, ducta perpendiculari ad rectam q n, (quæ per nonam huius) ſecabit angulum g a r, ſcilicet cadet à parte dextra à puncto r, in qua rectæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant, & erit breuior recta a r) & ſit a m, quod angulus a m n, erit rectus, & cum ſit externus trianguli a r m, habentis latus r m, productũ in r, erit æqualis ſummæ duorum internorum oppoſitorum r a m, & a r m, ideo communiter addito angulo g a m, qui eſt acutus, ſcilicet pars recti g a r, ſumma ab vna parte, quæ eſt trium angulorum a r m, r a m, & g a m, & ideo duorum a r m, & g a r, (poſito g a r, loco duarum eius partium r a m, & g a m, quæ integrè ipſum componunt) erit æqualis ſummæ duorũ a m n, & g a m, ſed hæc ſumma eſt minor duobus rectis, quia vnus eorum a m n, eſt rectus, alter vero g a m, acutus, quare ſimiliter ſumma illorũ g a r, & a r n, internorum dextrorum, linearum datarũ non æquidiſtantium erit minor duobus rectis.

Sed facile etiam veritas eiuſdem primæ partis decimæ Propoſitionis oſtendi poterit, hoc modo.

Quia duæ datæ non æquidiſtantes p g, & q n, ſectæ ab a r, ſe ſe appropinquant à parte g n, ipſæ conſiderentur productæ, quantum ſufficit, vt ſe ſe cõtinuo magis appropinquantes tandẽ concurrãt, & ſupponatur cõcurſus in b, Vnde conſiderato triangulo b a r, & vno ex eius lateribus b a, vel

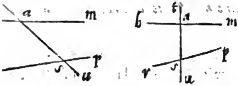




b r, pro-

producto in p, vel in q, (vel latere a r, producto in s, vel
s,) ponamus b a, in p; ſequitur, quod angulus externus p a r,
maior angulo a r b, interno oppoſito, Vel ob hoc, quod angu-
s a b, æqualis angulo p a r, (per 15. primi) ſit maior dicto
b, quapropter addito communiter angulo b a r, ſumma duo-
r p a r, & b a r, Vel duorum s a b, & b a r, quæ ſumma eſt
ualis duobus rectis (per 13. primi) erit maior ſumma duorum
r, & a r b, ſcilicet ſequitur, quod ſumma horũ g a r, & a r n,
ernorum dextrorum ſit minor duobus rectis, ſed quattuor inter-
mul ſumpti, ſunt æquales quattuor rectis, ideo ſumma duorum
quorum p a r, & q r a, qui ſunt à parte ſiniſtra, à qua lineæ da-
emotiores euadunt erit maior duobus rectis.

Nunc quod angulus internus à parte dextra, in qua duæ datæ non
idiſtantes ſupponuntur ad inuicem appropinquari, ſit minor in-
o ipſi coalterno ab altera parte, ſcilicet, quod a s p, ſit minor
ulo h a s. Vel quod m a s, ſit minor angulo a s r, facilè pro-
ur, quia cum ex demonſtratis notum ſit, ſummam duorum inter-
um dextrorum m a s, & a s p, eſſe minorem duobus rectis, &
13. primi) ſummam duorum m a s, & h a s, eſſe æqualem
duobus rectis, dempto ab vtraq; ſumma angulo m a s, communi, reliquus angulus a s p, ab vna parte, erit minor reliquo h a s, ab altera.



Similiter quia ſumma duorum r s a, & a s p, eſt æqualis duobus
s, & ideo maior ſumma duorum m a s, & a s p, quæ eſt mi-
duobus rectis, dempto ab vtraq; parte communi angulo a s p,
nebit angulus r s a, maior angulo m a s, ſeu m a s, minor
lo r s a, ipſi coalterno ab alia parte ſiniſtra. Eodẽ modo per-
um fiet quemlibet angulorum internorum dextrorum, ſcilicet
te, in qua duæ datæ non æquidiſtantes ſe ſe appropinquant eſſe
rem interno ſibi oppoſito ab eadem parte, quia quo ad m a s,
num ſuperiorem dextrum, ſumma eius cum angulo a s p, eſt
r duobus rectis, & ideo minor ſumma duorum a s p, & p s u,
ſt æqualis duobus rectis, vnde dempto cõmuni angulo a s p;
m a s, internus erit minor ſolo p s u, externo; Vel quia m a s,
inor angulo a s r, ſibi coalterno, erit etiã minor angulo u s p,
li (per 15. primi) dicto coalterno a s r. Idem dicitur de an-
a s p, reſpectu anguli t a m. Et poſtea, quod ab altera parte

 ſiniſtra

ſiniſtra, à qua datæ non æquidiſtantes ſe ſe remouent, conuerſo modo eueniat, quod quilibet duorum angulorum internorum ſit maior externo oppoſito ab eadem parte, ſimiliter patet, quoniam, quo ad a s r, ipſe cum angulo h a s, facit ſummam maiorem duobus rectis (per primam partem huius) ſed eidem h a s, addito angulo t a h, ſumma, quæ componitur eſt tantum æqualis duobus rectis, & ideo illa ſumma eſt maior iſta, vnde etiã ſolus angulus a s r, internus ſiniſter erit maior ſolo angulo t a h, externo ſiniſtro ſibi oppoſito. Eodem modo etiam probatur alium angulum h a s, internum ſiniſtrum eſſe maiorem alio externo ſiniſtro oppoſito r s u, Quod eſt, quod demonſtrare volebamus.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

Si ſuper duabus rectis datis, ducta ſit recta, quæ ſecet ambas, & accidat, quod ſumma duorum angulorum internorum ab eadem parte ſit æqualis duobus rectis; Vel quod internus ſuperior ab vna parte ſit æqualis interno inferiori ab altera parte, ſcilicet angulo ſibi coalterno; Vel quod externus ſit æqualis interno oppoſito ab eadem parte, tunc neceſſario duæ rectæ datæ ad inuicem erunt æquidiſtantes.

QVONIAM ſi duæ rectæ datæ non eſſent æquidiſtantes ad inuicem, illæ eſſent non æquidiſtantes, ſed non æquidiſtantes eſſe non poſſunt, quia tunc (per 10. huius) oporteret, quod ſumma duorũ angulorũ internorũ ab eadẽ parte eſſet minor, vel maior duobus rectis; Et quod internus ſuperior ab vna parte eſſet inæqualis interno inferiori ab altera parte, ſcilicet ſuo coalterno. Et quod externus eſſet inæqualis interno oppoſito ab eadem parte; Quod totum eſt contra ſuppoſitum; cum ergo rectæ datæ eſſe non poſſint non æquidiſtantes, erunt æquidiſtantes ad inuicem, vt demonſtrandum erat.

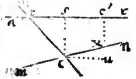
☞ Notandum eſt ſupradictam 11. Propoſitionem, oſtendere idẽ, quod oſtenditur in 27. & 28. primi Euclidis.

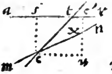
THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

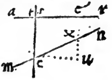
Si duæ rectæ lineæ datæ ſecentur à recta, & accidat, quod ſumma duorum angulorum internorum ab vna parte ſit maior, vel minor duobus angulis rectis; Vel quod internus ſuperior ab vna parte

parte ſit inæqualis interno inferiori ab altera parte (qui ſunt coalterni ad inuicem;) Vel quod externus ſit inæqualis interno oppoſito ab eadem parte, tunc duæ rectæ datæ erunt non æquidiſtantes ad inuicem; Et ſe ſe appropinquabũt à parte, in qua anguli interni ſimul iuncti ſunt minores duobus rectis; Seu in qua (quod eſt idem) internus eſt minor altero interno ipſi coalterno; Seu in qua (quod ſimiliter eſt idem) internus eſt minor externo ipſi oppoſito ab eadem parte.

QVIA duæ rectæ datæ ſupradictas cõditiones habentes non poſſunt eſſe æquidiſtantes: nam tunc (per quartam huius) neceſſario ſumma duorum angulorum internorum ab eadem parte eſſet æqualis duobus rectis; Internus eſſet æqualis interno ab altera parte ſibi coalterno; Et externus eſſet æqualis interno oppoſito ab eadem parte, quæ omnia ſunt contra ſuppoſitionem. Cum ergo non poſsint eſſe ad inuicem æquidiſtantes erunt non æquidiſtantes, vt demonſtrare volebamus. Quod vero duæ rectæ datæ magis propinquæ ſint à parte, in qua ſumma duorum angulorum internorum eſt minor duobus rectis, ita demonſtrari poteſt. Cum rectæ datæ a r, & a m, ſectæ ſint à recta t c, & duo anguli interni r t c, & n t c, à parte dextra minores ſint duobus rectis (quod tali pacto duo interni ſiniſtri erunt maiores duobus rectis, quoniam omnes quattuor interni ſemper ſunt æquales quattuor rectis) dicitur, quod ipſæ duæ rectæ datæ magis ſe ſe appropinquant à parte dextra; nam vt duo anguli interni dextri ſimul ſumpti euaderent æquales duobus rectis exiſtẽte ſuperiori r t c, oporteret maiorem facere inferiorem t c n, ipſi addendo, quod deficit ab illorum ſumma ad complementũ duo-





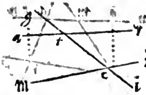


rum rectorum. Et manente linea t ſ, oporteret à puncto c, ducere rectam, quæ cum recta t c, conſtitueret angulum maiorem angulo t c n, quantum opus eſſet, & ob hoc ipſa recta ducenda tranſiret, ſubtus rectam c n, & ſit c u, (quæ reperietur ducendo à puncto c, perpendicularem c s, rectæ a r, & à puncto c, ad hanc c s, perpendicularem c u) & à puncto in ipſa c u, ſignato, ponamus à puncto u, ducatur perpendicularis u e, ad rectam a r, quæ

ſecabit

ſecabit rectam c n, poſitam inter c u, & s r, & ſit x, punctum ſectionis, ſcilicet ſcribatur x, in puncto ſectionis, & ob hoc pars x e, ipſius, erit breuior totali u e, & ideo erit etiam breuior recta c s, ipſi u e, æqualis (nam cum duæ rectæ s r, & c u, ſint æquidiſtantes ad inuicē (per 7. huius, q a ſectæ ſunt à recta s c, quæ facit angulos rectos cum qualibet illarū, ſcilicet, quæ eſt perpendicularis vnicuiq; ipſarū) & rectæ c s, & u e, perpēdiculares rectæ a r, & ideo ēt perpendiculares rectæ c u, (p 2. huius) oſtēdentes diſtantiam vnius ab altera, & cum ipſæ diſtātiæ ſint ad inuicem æquales (propter æquidiſtantiam dictam rectarum s r, & c u) conuenit, vt c s, & u e, quæ oſtendunt ipſas æquales diſtātias ſint ad inuicem æquales) quapropter propinquior eſt m n, rectæ a r, in x, quam in c, Vnde ipſe ſe ſe appropinquant à parte x, ſcilicet à parte dextra, vt volebamus probare; Et conſequenter ſe ſe remouēt à parte ſiniſtra, nam c s, diſtantia ſiniſtra eſt longior recta x e, diſtantia dextra inferioris lineæ m n, ad ſuperiorem a r, in duobus diuerſis punctis c, ſiniſtro, & x, dextro. Item, quod duæ rectæ datæ ſe ſe appropinquent à parte, in qua ſumma duorum angulorum internorum eſt minor duobus angulis rectis, poteſt probari tali modo. Si duæ rectæ datæ, & iam probatæ non æquidiſtantes, & quod neceſſario ab vna parte ſe ſe appropinquant, & ab altera ſe ſe remouent, non ſe ſe appropinquaſſent à parte vbi anguli ſunt minores duobus rectis, opus eſſet, quod illæ ſe ſe appropinquaſſent ab altera parte, vbi ſumma duorum angulorum internorum eſt maior duobus rectis, & ſe ſe remouiſſent à parte (& ſit dextra) vbi ſumma duorum angulorū internorum eſt minor duobus rectis; Sed ſumma duorum angulorum internorum à parte vbi lineæ non æquidiſtantes ſe ſe remouent eſt ſemper minor duobus rectis (per decimā huius.) Vnde ipſi duo anguli interni dextri eodem tempore eſſent minores, & maiores duobus rectis, quod eſt impoſsibile, impoſsibile ergo eſt, quod duæ rectæ datæ non ſe ſe appropinquent à dicta parte dextra, ideo ab ipſa parte dextra vbi ſumma duorum angulorum internorum eſt minor duobus rectis ſe ſe appropinquant, ſe ſe remouēdo ab alia parte vbi ſumma angulorum internorum eſt maior duobus rectis. Quo ad angulos internos coalternos. Si in duabus rectis datis a r, & m n, ſectis à recta t c, occurrat angulum r t c, internum ſuperiorem dextrum eſſe minorem angulo t c m, interno inferiori ſiniſtro ipſi coalterno (vel quod t c n, internus inferior dexter, ſit minor angulo a t c, interno ſuperiori ſiniſtro ipſi coalterno) hoc etiam nobis oſtendet, quod ipſæ lineæ (iam cognitæ non æquidiſtātes ob inæquali-

qualitatem dictorum angulorum coalternorum) magis ſe ſe appropinquant ab ipſa parte, vbi angulus eſt minor, quoniam ſi tàm angulo r t c, minori, quàm angulo t c m, ipſi maiori fingatur additus angulus t c n, ſumma duorum r t c, & t c n, qui ſunt interni ab vna eadem parte dextra, erit minor ſumma duorum t c m, & t c n, ſed hæc ſumma eſt æqualis duobus rectis (per 13. primi) ideo ſumma dictorum duorum internorum dextrorum erit minor duobus rectis, vnde per primam partem huius Propoſitionis iam demonſtratam, ſequitur quod ab eadem parte dextra duæ datæ a r, & m n, ſe ſe appropinquent, & ab alia ſe ſe remoueant. Et ſimiliter, quo ad externum, & internum oppoſitum ab eadem parte, ſi notum fuerit, quod angulus internus r t c, ſit minor externo i c n, ipſi oppoſito ab eadem parte dextra, vel quod t c n, ſit minor externo g t r; ſimiliter concluderemus, quod duæ datæ a r, & m n, (iam cognitæ non æquidiſtantes ob inæqualitatem dictorum angulorum internorum, & externorum oppoſitorum ad inuicem ab eadem parte) ſe ſe appropinquarent à dicta parte dextra, quia cum t c n, ſit minor angulo g t r, ſi tàm vni, quàm alteri mente iungatur angulus c t r, ſumma ipſius cũ angulo t c n, erit minor ſumma ipſius cum angulo g t r, ſed ſumma cum g t r, eſt æqualis duobus rectis, ideo ſumma cum t c n, erit minor duobus rectis, & quia hæc ſumma angulorum t c n, & c t r, comprehendit duos angulos internos dextros; ſequitur (per primam partem iam probatam huius Propoſitionis) quod ab ipſa parte dextra datæ a r, & m n, debeant ſe ſe appropinquare, & ſe ſe remouere ab altera parte ſiniſtra.



THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

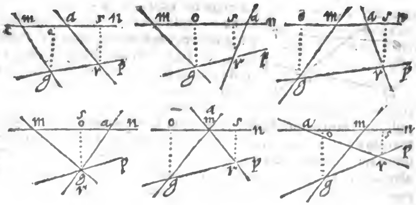
Si ſuper duas rectas datas ducantur lineæ ſecantes, ſumma duorum angulorum internorum ab vna eadem parte, quos faciet vna ſecantium cum duabus datis, erit æqualis ſummæ duorum internorum angulorum, quos ab eadem parte, faciet qualibet alia ſecans cum iiſdem duabus datis.

SI duæ rectæ datæ ſint æquidiſtantes, quia quælibet recta, quæ ſecet ipſas facit ſummam duorum angulorum internorum cum ipſis datis æqualem duobus rectis ſemper (per quartam huius) cla-

rum

Digitized by Google

rum eſt, quod proponitur. Sed ſi duæ datæ ſint non æquidiſtantes, ponamus m n, & g p, ſectæ ab a r, & m g, ita probabimus



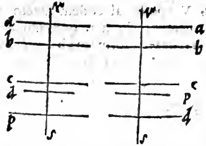
quantum proponitur; Ductis perpendicularibus g o, & r s, alteri datarum à duobus punctis ſectionis in alia, quæ duæ perpendiculares erunt ad inuicem æquidiſtantes (per octauam huius) & propterea ſumma duorum angulorum dextrorum internorum a o g, & o g r, factorũ ab vna, cum duabus datis, erit æqualis ſummæ duorum angulorum internorum ſimiliter dextrorum n s r, & s r p, factorum ab altera cum iiſdem duabus datis (cum angulus a o g, per ſe ſit æqualis angulo n s r, & angulus o g r, angulo s r p, per quartam huius.) Quia poſtea illis æquãtur duo s m g, & m g r; interni facti ab vna ſecantium cum duabus datis à parte dextra, & duobus alijs æquantur duo s a r, & a r p, interni facti ab altera ſecante, cum iiſdem duabus datis ab eadem parte dextra (& hoc totũ ob demonſtratis in prima parte decimæ huius) ſequitur, quod ſumma duorum angulorum factorum ab vna ſecantium ſit æqualis ſummæ duorum factorum ab altera ſecante ab eadem parte dextra cum duabus datis; Et conſequenter, quod ſumma duorum angulorum internorum factorum à parte ſiniſtra cum duabus datis ab vna ſecante, erit æqualis ſummæ duorum internorum factorum ab eadem parte ſiniſtra cum duabus datis ab alia ſecante, quoniam tàm iſti, quàm illi ſunt, quod remanet à dextris, vſq; ad quattuor rectos.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XIV.

Si quotquot rectæ lineæ datæ ſint æquidiſtantes vni rectæ propoſitæ, ipſæ erunt æquidiſtantes ad inuicem.

Sit

SIT quæcumque datarũ a b c d, æquidiſtans propoſitæ p. Dicitur ipſas eſſe ad inuicem æquidiſtantes; Nam poſita ad libitum vna recta perpendiculari ad propoſitam, & hæc producatur quouſq; ſecet quamcunq; datarum (ipſis etiã productis, ſi occurrat quouſq; perpendicularis propoſitæ lineæ eas ſecare poſſit) & ſit r s, illa (per ſecundam huius) erit etiam perpendicularis cuicunq; datarum, vnde (per ſeptimam huius) quæcunq; datarum erit æquidiſtans cuicunque alteri ipſarum datarum, ſcilicet recta a, cuicunque aliarum, ſimiliter b, cuicunque aliarum, & ſic c, ad d, & ad quaſcunque alias rectas æquidiſtantes rectæ p, propoſitæ.



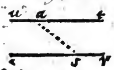
PROBLEMA. PROPOSITIO XV.

A dato puncto ducere rectam æquidiſtantem ad propoſitam rectam, quæ non ſit in directum cum ipſo puncto dato, ſcilicet talis ſit, vt ſi à puncto dato duceretur linea ad vnum terminorum propoſitæ, illa non vniatur cũ propoſita, ſed faciat angulũ cum ipſa.

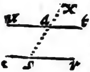
A Dato puncto a, ducenda ſit recta æquidiſtans rectæ propoſitæ c r. Ab ipſo puncto a, ducatur recta perpendicularis ad rectam c r, (producendo ipſam c r, quando opus ſit, tali modo, vt ipſa perpendicularis ſuper eam cadere poſsit, ita vt illa ſecari poſsit à dicta perpendiculari) & ſit a s, & ab eodem puncto dato a, ducatur perpendicularis ad hanc a s, ſeu à parte ſiniſtra, ſeu à dextra ad libitum, & ſit a u, vel a t, quæ a u, vel a t, ſeu u t, erit æquidiſtans rectæ c r, vt volebamus (per ſeptimam huius) cũm à cõſtructione, vna, & eadem recta a s, ſit perpendicularis propoſitæ c r, & a u, vel a t, ſeu totali u t, vel poſſumus dicere rectam u t, eſſe æquidiſtantem rectæ c r, (per 11. huius) cum quicunque angulorum ab a, & ab s, ſit rectus, & ideo cum ſumma duorum angulorum t a s, & r s a, internorum dextrorum, vel cum ſumma duorum u a s, & c s a, internorum ſiniſtrorũ ſit æqualis duobus rectis. Vel alio modo; A pũcto da-



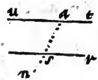
ĉo dato a. Ducatur rectam ad libitum, quæ perueniat ad propoſitam c r, & ſit a s, poſtea ab eodem puncto a, à parte dextra



ducatur recta a t, quæ cum recta a s, faciat angulum æqualem angulo a s c, ſiniſtro formato ab a s, & s c, Vel poſtea ab eodem puncto a, à parte ſiniſtra ducatur recta a u, quæ cum a s, faciat angulũ æqualem angulo a s r, dextro, formato ab a s, & s r, nam ita cũ ſint duo anguli t a s, & a s c, coalterni, vel duo u a s, & a s r, ſimiliter coalterni (duarum rectarum u t, & c r, ſectarum ab a s) æquales ad inuicem, recta u t, ducta, aut tranſiens per punctum a, datum, erit (per 11. huius) æquidiſtans rectæ c r, propoſitæ. Vel alio modo; A dato puncto a, ducta recta, quo quomodo, quæ perueniat ad c r, propoſitam, ipſa producatur à parte ſuperiori puncti a, quantumlibet, ponamus in x, poſtea à puncto a, ducatur recta a t, quæ à parte dextra cum recta a x, faciat angulum æqualem angulo a s r, quem ab ipſa parte



dextra facit recta a s, ducta cum recta s r. Vel (quod idem eſt) poſtea à puncto a, ducatur recta a u, quæ à parte ſiniſtra cum a x, faciat angulum æqualem angulo a s c, quem ab eadem parte ſiniſtra facit recta a s, ducta cũ recta s c, & ita conſideratis duabus rectis u t, & c r, ſectis à recta x s, quia angulus externus x a t, dexter, eſt æqualis interno a s r, ipſi oppoſito ab eadem parte, Vel quia angulus externus x a u, ſiniſter eſt æqualis interno a s c, ipſi oppoſito ab eadem parte, ſciemus (per 11. huius) quod duæ rectæ u t, & c r, ſunt æquidiſtantes ad inuicem. Et ſi nolemus producere rectam a s, à parte ſuperiori a, producatur ab inferiori s, ponamus in n, poſtea à puncto



a, ducatur a t, dextra, quæ cum a s, faciat angulum t a s, dextrum æqualem interno dextro r s n, Vel ducatur a u, ſiniſtra, quæ cum a s, faciat angulum u a s, ſiniſtrũ æqualem interno ſiniſtro c s n; quod ob eãdem cauſam ſupradictam recta a t, ſeu dicamus u t, erit æquidiſtans propoſitæ c r. Nec dubitandum eſt quod duæ rectæ u a, & a t, non ſint ſimul coniunctæ indirectum conſtituendo vnam rectam u t, ſcilicet, quod u a, producta verſus a, non vniatur cum recta a t, vel quod t a, producta verſus a, non vniatur cum recta a u; quoniam cum angulus x a t, ſit æqualis angulo a s r, & angulus x a u, æqualis angulo a s c, etiam ſumma duorum angulorum x a t, & x a u, erit æqualis ſummæ duorum

a s r, &

Digitized by Google